教学设计

<table>
<tr><th colspan="6">3.2.2 双曲线的简单几何性质（第 2 课时）</th></tr>
<tr><td>学科</td><td>数学</td><td>年级</td><td>高二</td><td>学期</td><td>秋季</td></tr>
<tr><td>备课人</td><td>刘俊华 李晗</td><td>学校</td><td colspan="3">东营市第一中学</td></tr>
<tr><td rowspan="2">教科书</td><td colspan="5">书名：高中数学选择性必修第一册（2019A 版）</td></tr>
<tr><td colspan="5">出版社：人民教育出版社</td></tr>
<tr><th colspan="6">教材分析</th></tr>
<tr><td colspan="6">本节课是 2019 人教 A 版高中数学选择性必修一第三章《圆锥曲线的方程》第二单元《双曲线》中《双曲线的简单几何性质》的第二课时，主要内容是双曲线的方程及其简单几何性质的简单应用.本节通过三个例题分别研究了在实际问题中求双曲线的方程、双曲线的轨迹方程（第二定义）、直线与双曲线的位置关系.坐标法依然是本节重要的数学思想方法.同时，在解决问题的过程中，也培养了学生数形结合、类比迁移、特殊一般、转化与划归等数学思想方法.</td></tr>
<tr><th colspan="6">学情分析</th></tr>
<tr><td colspan="6">学生之前已经学习过椭圆的简单几何性质及其应用，可以类比研究椭圆实际问题、轨迹方程、直线与椭圆的位置关系的方法和步骤，探究双曲线的应用. 但是，学生对“例 4”中实际问题的数学模型化处理方法并不熟练，对“例 5”中轨迹方程与椭圆中的“例 6”中的轨迹方程的联系与区别及其规律性不易发现，对“例 6”中直线与双曲线的一系列问题的思想方法的统一性感悟不深，这都需要老师做适当的引导.</td></tr>
<tr><th colspan="6">课程标准及目标分析</th></tr>
<tr><td colspan="6">课程标准：会求实际问题中的双曲线的标准方程，会用坐标法求轨迹方程、掌握直线与双曲线的位置关系.
目标分析：1、通过实际应用题的求解，培养学生数学抽象、数学建模核心素养.
2、在用坐标法求点的轨迹方程的过程中，培养学生数据分析、逻辑推理核心素养.
3、运用整体求解思想处理直线与双曲线的位置关系的一系列问题，培养学生直观想象、
数学运算核心素养.</td></tr>
<tr><th colspan="6">教学重难点</th></tr>
<tr><td colspan="6">教学重点：双曲线的标准方程与简单几何性质的应用.</td></tr>
</table>

教学难点：双曲线的几何性质的熟练运用.

教学方法

教法：根据本节课的特点，采用引导发现和类比归纳相结合的教学方法，引导学生利用已学知识解决新的问题，调动学生的积极性，鼓励学生通过观察图形发现问题，突破难点。

学法：学生在教师创设的问题情境中，通过观察、类比、探究、归纳，用所学知识解决新的问题，并通过多媒体演示让学生更形象的了解了图形的变化，体现了类比和数形结合的数学思想方法的应用。

教学环境

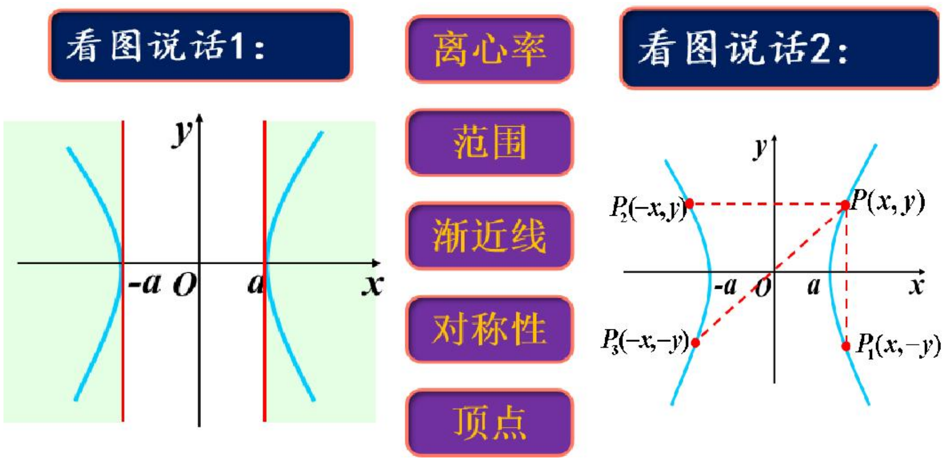
1、网络多媒体教室

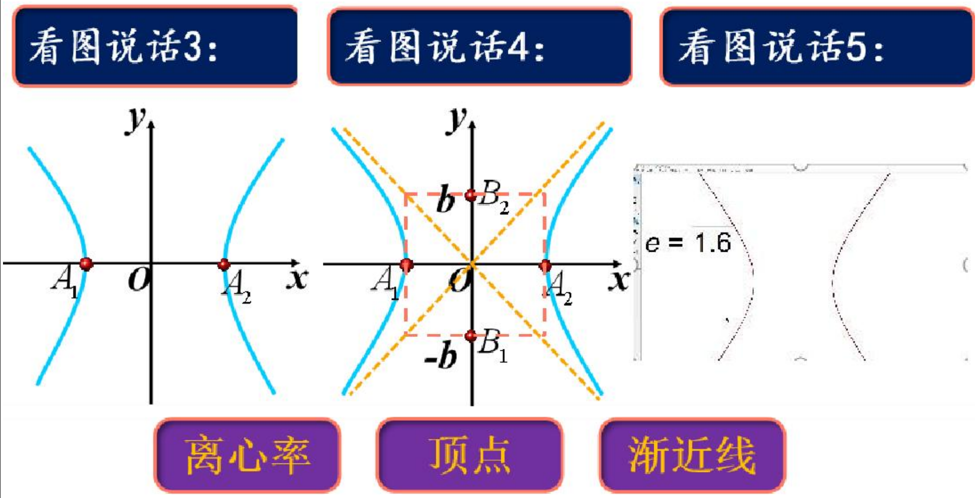
2、几何画板软件、投屏软件

课时安排

第二课时（共 2 课时）

教学过程

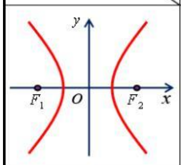
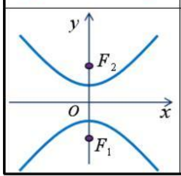
教师活动	学生活动	设计意图
环节一：复习回顾		
师：问题 1：上节课我们学习了双曲线的简单几何性质，我们分别从“数”和“形”两方面探究了椭圆的“范围”、“对称性”、“顶点”、“渐近线”、“离心率”，我们一起来“看图说话”连连看！  生：第一幅图是范围问题，第二幅图是对称性问题.	学生看图说话，连连看.	回顾双曲线的简单几何性质.



生：第三幅图是顶点问题，第四幅图是渐近线问题，第五幅图是离心率问题.

师：具体性质我们一起回顾一下.

双曲线的简单几何性质：

图象 \ 性质	方程	范围	对称性	顶点	渐近线	离心率
	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$x\geq a$或$x\leq -a$, $y\epsilon R$	关于坐标轴和原点都对称	$(-a,0)$ $(a,0)$	$y=\pm\frac{b}{a}x$	$e=\frac{c}{a}>1$ $c^2=a^2+b^2$, c最大
	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$	$y\geq a$或$y\leq -a$, $x\epsilon R$		$(0,-a)$ $(0,a)$	$y=\pm\frac{a}{b}x$	

师：学以致用——这节课我们综合运用所学双曲线知识和坐标法来解决一些现实问题和数学问题.

回顾双曲线的几何性质，提出运用双曲线的知识解决有关问题。发展学生数学抽象、直观想象的核心素养。

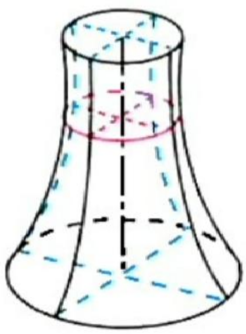
<table>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>

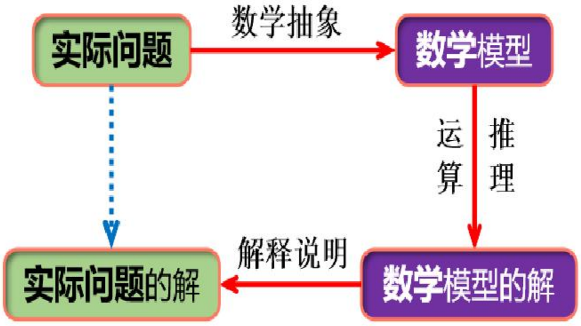
环节二：实际问题，建模双曲线

例 4、双曲线型冷却塔的外形，是双曲线的一部分绕其虚轴旋转所成的曲面.它的最小半径为 12m，上口半径为 13m，下口半径为 25 m，高为 55 m.试建立适当的坐标系，求出此双曲线的方程（精确到 1m).

师：问题 2：要从数学角度求解一个实际问题，我们分几步处理呢？

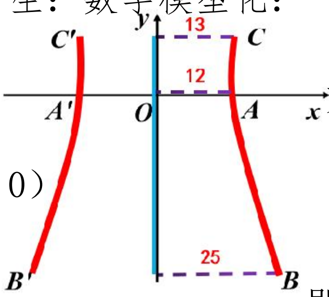
我们可以参照下图的模式构建数学模型求解：





师：你能将它进行数学模型化么？

生：数学模型化：



如图建立平面直角坐标系，则 A（12，0）

即 a=12，C（13，yC），B（25，yB），yC-yB=55,求双曲线的方程（精确到 1m）.

</td><td>

思考数学模型的实际应用题的解题步骤.

学生思考书写，老师提问引导学生逐句“翻译”，建立数学模型，然后学生书

</td><td>

回顾关于数学模型的实际应用题的解题步骤，为解题做准备.

培养学生的数学建模思想，并通过双曲线的知识和方程思想解决实际问

</td></tr>
</table>

师：请说说您的求解思路.

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$且$a=12$

则$\begin{cases}\frac{13^2}{12^2}-\frac{{y_C}^2}{b^2}=1\\ \frac{25^2}{12^2}-\frac{{y_B}^2}{b^2}=1\end{cases}$ 则$\begin{cases}\frac{13^2}{12^2}-\frac{{y_C}^2}{b^2}=1 ①\\ \frac{25^2}{\ldots}-\frac{(y_C-55)^2}{\ldots}\end{cases}$ 由方程①得$y_c=\frac{5b}{12}$，代入②得

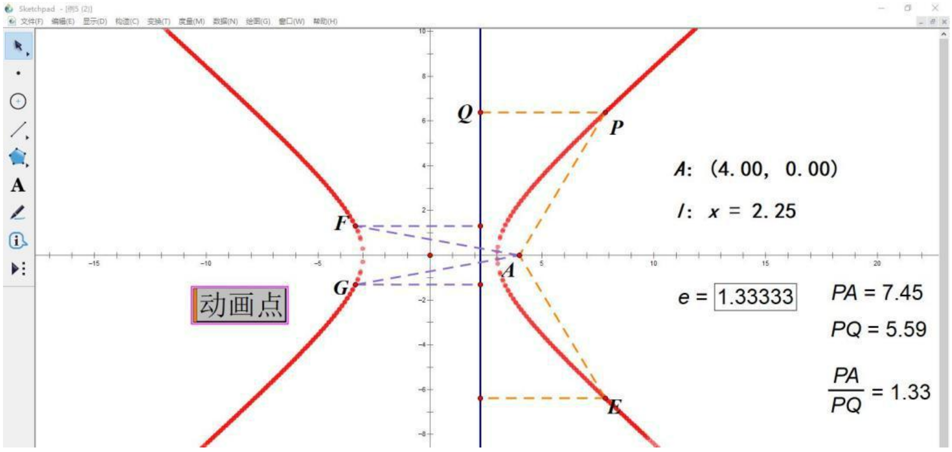
$\frac{13^2}{\ldots}-\frac{(\frac{5b}{12}-55)^2}{\ldots}$

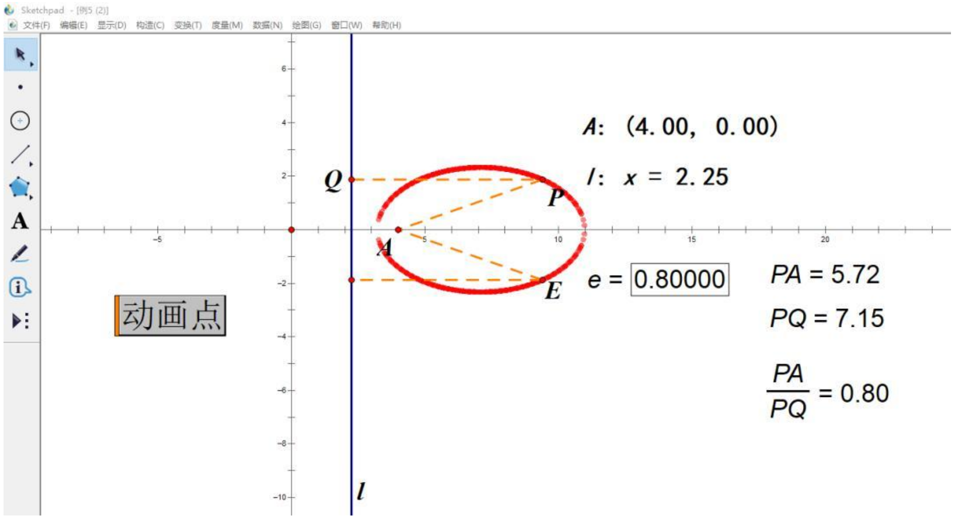
生： 师:很不错，通过计算我们得到如下结果，这样，我们就轻松完成了双曲线模型的实际应用题的求解. **化简得 $19b^2+275b-18150=0$ 　　解得 $b\approx25$(负值舍去)** **因此所求双曲线方程为 $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{625}=1$** 师：接下来我们来看看这种点的轨迹方程的形成有什么特别之处?	写，老师投影展示.	题，提高运算能力.
环节三：动点轨迹，新构双曲线		
例 5、动点 M(x, y)与定点 F(4, 0)的距离和 M 到定直线 l :x=9/4 的距离的比是常数 4/3 ,求动点 M 的轨迹. 师：追问 1：“轨迹”与“轨迹方程”意思一样吗？生：不一样，轨迹是轨迹方程所代表的的图形. 师：请同学们写一写，看看谁先看清点 M 的“长相”？ 生：解：由题意可得 $\frac{\sqrt{(x-4)^2+y^2}}{\lvert x-\frac{9}{4}\rvert}=\frac{4}{3}$ 将上式两边平方，并化简得 $7x^2-9y^2=63$ 即 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$	学生独立思考并完成.	训练学生用坐标法求轨迹方程，并培养运算能力.
所以，点 M 的轨迹是焦点在 x 轴上，实轴长为 6，虚轴长为 2√7 的双曲线. 师：追问 2：将例 5 与椭圆一节中的例 6（113 页）比较,哪个数据的不同导致了曲线的不同类型？ 例6 动点 $M(x,y)$ 与定点 $F(4,0)$ 的距离和 M 到定直线 $l:x=\frac{25}{4}$ 的距离的比是常数 $\frac{4}{5}$，求动点 M 的轨迹. 点 M 的轨迹是焦点在 x 轴上的椭圆，轨迹方程为 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. 例2 点 $M(x,y)$ 到定点 $F(4,0)$ 的距离和它到定直线 $l:x=\frac{9}{4}$ 的距离的比是常数 $\frac{4}{3}$，求点 M 的轨迹. 点 M 的轨迹是焦点在 x 轴上的双曲线，轨迹方程为 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$.	学生观察、比较，发现问题并提出猜想.	引导学生自己发现问题，产生认知冲

<table>
<tr>
<td>
生：距离之比.

师：追问 3：这个数据代表什么呢？

生：离心率.

师：我们一起用几何画板验证一下吧！


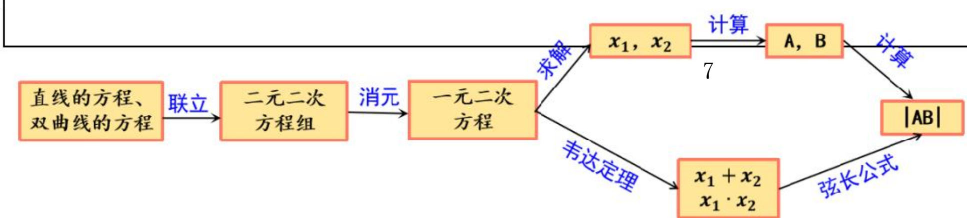
生：哇
师：大家刚才说这个常数代表离心率影响了最终的图形，我们来吧这个常数换成大于 0 小于 1 的常数看看轨迹是什么图形？


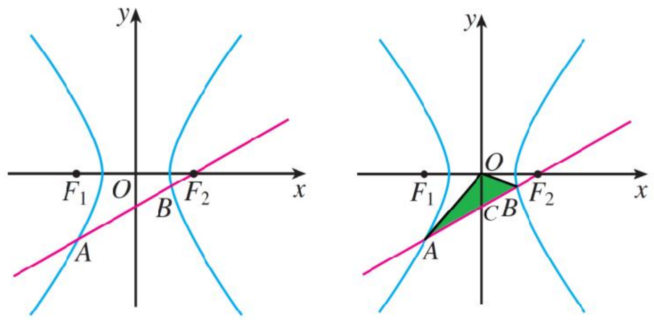
师：方法归纳——解锁构建椭圆、双曲线的新方式：

师生共同：平面内到定点 F 的距离与到定直线 l（不过 F 点）
</td>
<td>
老师带领学生用几何画板验证学生的猜想，并学生自己改变常数 e 的值来观察轨迹图形的改变.
</td>
<td>
突，引发学生深度思考.

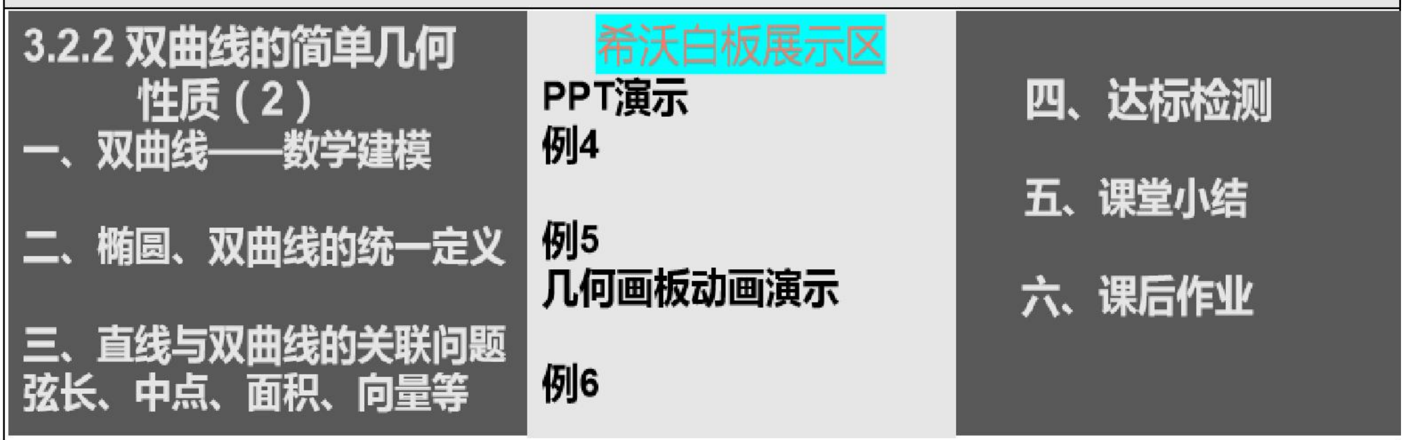
用几何画板软件进行动态展示，既验证了猜想，同时让学生自己获取了选择“解锁”椭圆、双曲线的新方式——“第二定义”，提高学习效率.
</td>
</tr>
</table>

的距离之比为常数 e 的点的轨迹. ①若常数 0<e<1,则点的轨迹为椭圆; ②若常数 e>1,则点的轨迹为双曲线. 师：常数 e 还有什么值您最想知道？ 生：常数 e=1 呢？ 师：且听下回分解.		
环节四：曲直相交，关联双曲线		
例3、如图，过双曲线$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1$的右焦点$F_2$，倾斜角为$30^o$的直线交双曲线于A，B两点，求|AB|. 师：请同学们思考一下. 生 1：由题意得$F_2(3,0)$，所以直线AB的方程为$y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-3)$ 由$\begin{cases} y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-3), \\ \frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1, \end{cases}$ 消去y，得 $5x^2+6x-27=0.$ 解这个方程，得 $x_1=-3, x_2=\frac{9}{5}.$ 于是，A,B两点的坐标分别为$(-3,-2\sqrt{3}),(\frac{9}{5},-\frac{2\sqrt{3}}{5}).$ 所以$\|AB\|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\frac{16}{5}\sqrt{3}.$ 师：有不一样解法的同学吗？ 生 2：先联立方程组 消去y，得 $5x^2+6x-27=0.$ 设$A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$, 则有 $x_1+x_2=-\frac{6}{5}, x_1x_2=-\frac{27}{5}.$ $\therefore \|AB\|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{16\sqrt{3}}{5}.$ 师：方法归纳——求解直线被双曲线所截得的线段的长 师生共同：	学生思考后回答方法思路，有不同方法的同学做方法补充.	由于求弦长问题在圆、椭圆中已经学习，故让学生自己写一写，并发现自身的不足之处，渗透“设而不求，整体求解”



		思想.
师：追问 1：已知条件不变，能求 AB 中点 M 的坐标吗？ 生：可以. 师：除了求弦长、中点，还能求什么？讨论一下！ 生：能求△AOB 的面积.（追问 2）  师：还能求什么？比如说向量？（追问 3） 生：可以. 师生共同： $\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}=(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)$ $=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+\frac{\sqrt{3}}{3}(x_1-3)\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}(x_2-3)$ $=x_1x_2+\frac{1}{3}[x_1x_2-3(x_1+x_2)+9]$ $=\frac{4}{3}x_1x_2-(x_1+x_2)+3$ 师：还有吗？课后请相互命题送给你的同学？（追问 4） 师：追问 5：若将直线方程改为 y=k(x−3),此时联立后的方程组将会含有什么参数,若已知弦长为 6，能求出 k 吗？	学生思考后回答“追问 1”、“追问 2”“追问 3” 学生掌握方法后相互命题，增加趣味性. 让学生回答含参问题的	通过“追问 1”变式“中点问题”，通过“追问 2”变式“面积问题”，通过“追问 3”变式“向量问题”，以及“追问 5”含参问题，让学生在比较中自己发

生：可以，含参数 k，解方程即可. 师：其他几个追问呢？ 生：也可以. 师生：方法归纳：设而“不求”——不单求，整体求.	求解思路，并发现方法的一致性.	现这一类问题的共同求解方法.
环节五：达标检测，摸底双曲线		
1. 已知A,B两点的坐标分别为（-6，0），（6，0），直线AM，BM相交于M，且它们的斜率之积是$\frac{2}{9}$.求点M的轨迹方程，并判断轨迹的形状. 2. 求下列直线和双曲线的交点坐标： (1) $2x-y-10=0$, $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$;　(2) $4x-3y-16=0$, $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$ 3. 直线$y=\frac{2}{3}x$与双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{8}=1(a>0)$相交于A,B两点，且A,B两点的横坐标之积为$-9$，求离心率$e$.	学生练习检测	通过轨迹方程的求解和直线与双曲线位置关系的考察，检测本节课学生所学.
环节六：课时小结，回归双曲线		
1、例 4 是什么问题？你学会了什么？ 生：实际问题，数学建模的方法步骤. 2、在例 5 中，您又“解锁”椭圆与双曲线了吗？ 生：到定点距离与定直线距离之比为常数的点的轨迹. 3、通过例 6，直线与双曲线相交时，有哪些问题，怎样处理？ 生：弦长、中点、面积等问题，韦达定理，设而不求，整体求解.	学生进行课堂小结，还可以提出自己的困惑，师生探讨。	通过总结，让学生进一步巩固本节所学内容，提高概括能力。

环节七：课后作业，巩固双曲线		
（一）基础类作业（必做） 教科书第 127 页习题 3.2 第 9、10、13、14 题 （二）探究类作业（选做） 针对课堂中直线与双曲线的相关问题进行自命题，并在同学中相互“送题”.	学生课后根据能力完成分层作业.	分层次布置作业，提高学生的学习效率，并发现教学的不足。
板书设计		
		
教学反思		
学生对于例 4 这道数学建模类型的实际应用题，之前不知道从哪里下手，引导学生逐步“翻译”为数学语言后学生适应多了，这提醒我在以后的教学中引导学生“逐句”、“逐步”分析问题，从而更轻松的解决问题；对于“例 5”中用几何画板软件验证学生的猜想，学生眼前一亮，非常感兴趣，这提醒我在以后的教学中多使用数学软件，多设计动画演示，从而呈现出更有画面感的教学效果；对于“例 6”的层层递进式的追问，学生也能逐个回答并解决，从而解决直线与双曲线的位置关系的关联性问题，并且对于课后将自己设计的“变式”题送个好朋友非常有兴趣；因此，我会在以后的教学中多设计有梯度的层层追问，多设计趣味性的课堂、课外教学.		